جامعة البعث | امتحان مقرر التحليل١ | الاسم
كلية العلوم | العام الدراسي ٢٠١٥–٢٠١٦ | الرقم :

السنة أولى– رياضيات سف١

السؤال الأول [٣٠]: ليكن لدينا السلاسل التالية :

$$x_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}, \quad y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n},$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right), S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1+n^2}{n^2}\right), S_3 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{\sqrt[n]{n^{[illegible]}}}\right)(x-4)^n$$

و المطلوب : ١) ادرس تقارب السلسلتين الأولى والثانية واحسب المجموع في حال التقارب !

٢) أوجد المجال النهائي لتقارب السلسلة الأخيرة .

٣) أوجد نهاية كل من المتتاليتين (x_n, y_n).

السؤال الثاني [٥٠]: ليكن لدينا الدالتين التاليتين :

$$f(x) = Arcchx, \quad g(x) = \arcsin x, \quad h(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{5x-1}\right) - \frac{1}{\sin(5x-1)} & , x < \frac{1}{5} \\ 1[illegible] & , x = \frac{1}{5} \\ \arctan[5 - e^{[illegible]}] & , x > \frac{1}{5} \end{cases}$$

و المطلوب :

١) أوجد مشتق $g(x)$, $f(x)$!

٢) ادرس استمرار الدالة $h(x)$ وحدد نوع نقطة الانقطاع إن وجدت!

٣) اكتب معادلة منحني الشيطان (Devil's Curve) مع الرسم واحسب $y_{,}$

Scanned by CamScanner

السؤال الثالث [١٥ د]: ادرس تقارب الجداءات اللانهائية التالية :

$$P_1 = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right),$$

$$P_2 = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3 + n^{\sqrt{17}}}{n^{\sqrt{17}}}\right),$$

$$P_3 = \prod_{n=1}^{\infty}\left(2^{n^{-n}}\right).$$

انتهت الأسئلة

حمص في ١٧/ ١/٢٠١٦ مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

د. مصطفى حسن

Scanned by CamScanner

سلم تصحيح امتحان مقرر التحليل١ للسنة الأولى رياضيات-15-16-ف١

السؤال الأول [٣٠د]: ١) السلسلة الأولى (10):

إن المقدار داخل دالة arctan يكتب على الشكل:

$$\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}}=\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1+\frac{1}{n(n+1)}}=\frac{1}{n(n+1)+1}=\frac{1}{n^2+n+1}$$

ومنه فإن الحد العام للمتسلسلة المعطاة (اعتماداً على القاعدة السابقة) يكتب بالشكل:

$$a_n=\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\arctan\left(\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}}\right)=\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

وبالتالي لنشكل متتالية المجاميع الجزئية بالشكل:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=$$

$$=\left(\arctan(1)-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)-\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)+\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)-\arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right)+$$

$$+\cdots\cdots+\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)=\arctan(1)-\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\arctan(1)-\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

وبما أن متتالية المجاميع الجزئية متقاربة من $\frac{\pi}{4}$ فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة ومجموعها يساوي $\frac{\pi}{4}$.

أما الثانية فهي متباعدة لأنها لاتحقق الشرط اللازم(٥)

$$S_2: a_n=\arcsin\left(\frac{1+n^2}{n^2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\arcsin 1=\frac{\pi}{2}\neq 0$$

٢) السلسلة الثالثة(٧):متناوبة وهي تحقق شرطي ليبنتز فهي متقاربة

$$S_3=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5}{\sqrt[17]{n^{2016}}}\Rightarrow a_n=\frac{5}{\sqrt[17]{n^{2016}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ a_n>a_{n+1}$$

فهي متقاربة. ونلاحظ أيضاً أن:

$$S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{5}{\sqrt[17]{n^{2016}}}\right|=\sum\frac{5}{\sqrt[17]{n^{2016}}}=5\sum\frac{1}{n^{\frac{2016}{17}}}$$

وهي متقاربة لأنها سلسلة ريمان حيث $\frac{2016}{17}>1$، فالتقارب مطلق.

٣) تقارب المتتاليتين (٤+٤=٨):

$$x_n=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2(n+2)}-\frac{n}{2}=\frac{n^2+n-n^2+2n}{2n+4}=\frac{n}{2n+4}\to\frac{1}{2}$$

Scanned by CamScanner

$$y_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} \to 2.$$

السؤال الثاني [٥٥ د]:

١) إيجاد المشتق بطريقتين-١٤-:

$$f(x)=y=Argchx \Rightarrow chy = x \Rightarrow y' \, shy = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{ch^2y-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$g(x)=y=\arcsin x \Rightarrow x = \sin y \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

٢) استمرار الدالة $h(x)$ -٢٦-: الدالة مستمرة لأنها تركيب دوال مستمرة ولكن في النقطة $x=\frac{1}{5}$ نجد:

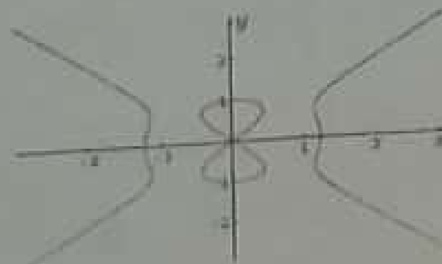
$$\lim_{x \to \frac{1}{5}} y_2 = 0 \, , \quad \lim_{x \to \frac{1}{5}} y_2 = 4 \neq h\left(\frac{1}{5}\right) = 17$$

فالدالة مستمرة من اليمين وبما أن إحدى النهايتين غير محدودة فنقطة الانقطاع $\frac{1}{5}$ هي من النوع الثاني.

٣) (١٥=٥+٥+٥) تعطى المعادلة الديكارتية لمنحني الشيطان بالشكل التالي:

$$y^4 - x^4 + a.y^2 + b.x^2 = 0$$

و يأخذ منحنيه الشكل التالي:



$$4.y^3y'_x - 4x^3 + 2ay\,y'_x + 2x = 0 \Rightarrow y'_x = \frac{4x^3-2x}{4.y^3+2ay}$$

Scanned by CamScanner

الجواب الثالث [١٥ د]: ادرس تقارب الجداءات اللانهائية التالية (٧+٤+٤):

إن الحد العام للجداء الأول -7- يكتب بالشكل :

$$a_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \left[\frac{n+1}{n}\right]\left[\frac{n+1}{n+2}\right]$$

وبالتالي تشكل متتالية الجداءات الجزئية :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)\left(\frac{k+1}{k+2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k+2}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right) = (n+1)\left(\frac{2}{n+2}\right) = \frac{2(n+1)}{(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(n+1)}{(n+2)}\right) = 2$$

وبما أن متتالية الجداءات الجزئية متقاربة من 2 فإن الجداء متقارب وقيمته تساوي 2 .

. أما في الجداء الثاني فنلاحظ أن :

$$P_1 = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+n^{\sqrt{17}}}{n^{\sqrt{17}}}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n^{\sqrt{17}}}+1\right) ; a_n = \frac{3}{n^{\sqrt{17}}} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

فهنا لا نستطيع الحكم و لكن نستطيع وفق المبرهنة-٤- أن نحيل الدراسة إلى دراسة السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^{\sqrt{17}}}$ و هي سلسلة ريمان و لكون $s = \sqrt{17} > 1$ فهي متقاربة فالجداء الموافق متقارب.

الجداء الثالث-4-:

$$P_1 = \prod_{n=1}^{\infty}\left(2^{\pi^{-n}}\right) \Rightarrow \ln 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^n} = \ln 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi^n}\right) - 1 =$$

$$= \ln 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\pi}} - 1\right) = \ln 2\left(\frac{1}{\pi - 1}\right)$$

ومنه الجداء متقارب وناتجه : $P_1 = \ln 2\left(\frac{1}{\pi-1}\right)$ وفقاً للمبرهنة-٣-.

Scanned by CamScanner